Discrete Mathematics 38 (1982) 227–241
North-Holland Publishing Company

UN RÉSULTAT D'INTÉGRITÉ

P.A. PICON

U.E.R. de Mathématiques, Université de Paris VII, 2 place Jussieu, Paris, France

Received 13 January 1981

We prove arithmetically that some quotient of products of factorials is an integer, which can have in a very special case a combinatorial interpretation (see [3]).

Dans ce qui suit, il s'agit de montrer qu'un certain quotient de produits de factorielles est entier. Pour un nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, c'est à dire $x-[x]$, qu'on appelle aussi x modulo 1. Pour un nombre rationnel a/b, on note $|a/b|_\pi$ sa valuation π-adique, c'est à dire l'exposant du nombre premier π dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme il est bien connu et simple à voir que, n étant un entier naturel, $|n!|_\pi=\sum_{\nu=1}^{\infty}[n/\pi^\nu]$ (voir [18, p. 263]), pour que $(\prod_i (u_i)!)/(\prod_j (v_j)!)$ soit entier, il faut et suffit que

$$\sum_j \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_j}{\pi^\nu}\right]\leqslant\sum_i \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_i}{\pi^\nu}\right]$$

pour chaque π premier. A plus forte raison, il suffit que ce soit vrai pour chaque ν et même que

$$\sum_j\left[\frac{v_j}{a}\right]\leqslant\sum_i\left[\frac{u_i}{a}\right]$$

pour tout a, ce qu'ont employé beaucoup d'auteurs ([1, pp. 263–270] et [2, p. 348]). Ce problème fait l'objet d'un article de E. Landau [2] que nous voulons citer bien que n'en faisant pas exactement usage, et dont le résultat principal est le suivant:

Théorème. *Soient (u_i) et (v_j) deux familles de formes linéaires sur N^n, à coefficients dans N.*

$\prod_i (u_i(x))!/\prod_j (v_j(x))!$ *est un entier naturel pour chaque $x\in N^n$, si et seulement si* $\sum_j [v_j(x)]\leqslant\sum_i [u_i(x)]$ *pour chaque $x\in[0,1]^n$.*

Résultat qui semble ne pas avoir été utilisé par la suite, peut-être parce que cité de façon erronée par Dickson [1, p. 268], et dont l'essentiel est la condition nécessaire, la suffisante étant presque immédiate et, en substance, déjà connue.

Passons maintenant à l'objet de cet article.

Théorème.[1] *Soient n, p, x_1, $x_2, \ldots, x_{n+1}$, d. des entiers naturels avec $d \geq 1$; alors*

$$E = \frac{\prod_{k=0}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i + kd \right)! \; ((nk+1)d-1)!}{\prod_{k=0}^{p} \left(\prod_{i=1}^{n+1} (x_i + kd)! \right) (d-1)!}$$

est aussi un entier naturel. De plus pour $n \geq 2$, $(p+1)!$ divise E.

Preuve. On utilisera les égalités bien connues $[m+x] = m + [x]$ pour m entier d'où:

$$\left[\sum_i x_i \right] = \sum_i [x_i] + \left[\sum_i \{x_i\} \right] \quad \text{et} \quad \left[\sum_i x_i \right] \geq \sum_i [x_i].$$

Notons que pour $n = 0$, $E = 1$. D'après ce qui vient d'être dit, il suffit de montrer que pour chaque π premier,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} S\left(p, \frac{d}{\pi^\nu}\right) &\geq 0 && \text{pour } n = 1, \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{p+1}{\pi^\nu} \right] && \text{pour } n \geq 2, \end{aligned}$$

où

$$S\left(p, \frac{d}{\pi^\nu}\right) = \sum_{k=0}^{p} R\left(\frac{x_i}{\pi^\nu}, \frac{d}{\pi^\nu}, k \right)$$

et

$$R\left(\frac{x_i}{\pi^\nu}, \frac{d}{\pi^\nu}, k \right) = \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{\pi^\nu} + k \frac{d}{\pi^\nu} \right] + \left[(nk+1) \frac{d}{\pi^\nu} - \frac{1}{\pi^\nu} \right]$$
$$- \sum_{i=1}^{n+1} \left[\frac{x_i}{\pi^\nu} + k \frac{d}{\pi^\nu} \right] - \left[\frac{d}{\pi^\nu} - \frac{1}{\pi^\nu} \right].$$

On observe que

$$R\left(\frac{x_i}{\pi^\nu}, \frac{d}{\pi^\nu}, k \right) = R\left(\frac{x_i}{\pi^\nu} + 1, \frac{d}{\pi^\nu} + 1, k + \pi^\nu \right),$$

c'est-à-dire qu'on peut remplacer x_i/π^ν et d/π^ν par leurs restes modulo 1. D'autre part, si $|d|_\pi = \upsilon'$, $d/\pi^\nu = d'/\pi^{\nu-\nu'}$ avec $(d', \pi) = 1$, et on a:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} S\left(p, \frac{d}{\pi^\nu}\right) = \sum_{\upsilon=1}^{\nu'} S\left(p, \frac{d'}{\pi^{\nu-\nu'}}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} S\left(p, \frac{d'}{\pi^\nu}\right) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} S\left(p, \frac{d'}{\pi^\nu}\right).$$

si $S(p, d'/\pi^{\nu-\nu'}) \geq 0$ pour $\nu \leq \nu'$, ce qu'on constate immédiatement en faisant $d = 0$, reste modulo 1 de $d'/\pi^{\nu-\nu'}$ qui est entier pour $\nu \leq \nu'$, et qui donne $[\sum_{i=1}^{n+1} x_i/\pi^\nu] \geq \sum_{i=1}^{n+1} [x_i/\pi^\nu]$. On peut donc supposer $(d, \pi) = 1$.

[1] Pour $n = d = 1$, E s'interprète comme un nombre de partitions (voir [3, p. 39]), et même dans ce cas le fait que E soit entier ne semble pas avoir auparavant été montré directement.

Ensuite, de la périodicité de R en k et de

$$p+1=\left[\frac{p+1}{\pi^\nu}\right]\pi^\nu+p', \quad 0\leqslant p'\leqslant \pi^\nu-1,$$

on tire

$$S\left(p,\frac{d}{\pi^\nu}\right)=\left[\frac{p+1}{\pi^\nu}\right]S\left(\pi^\nu-1,\frac{d}{\pi^\nu}\right)+S\left(p'-1,\frac{d}{\pi^\nu}\right)$$

en convenant que $S(-1,d/\pi^\nu)=0$, et il suffit maintenant de montrer que: $S(p,d/\pi^\nu)\geqslant 0$ pour $0\leqslant p\leqslant \pi^\nu-1$ et $n\geqslant 1$, et $S(\pi^\nu-1,d/\pi^\nu)\geqslant 1$ pour $n\geqslant 2$.

$[(d/\pi^\nu)-(1/\pi^\nu)]=0$ puisque $(d,\pi)=1$,

$$\left[(nk+1)\frac{d}{\pi^\nu}-\frac{1}{\pi^\nu}\right]=\left[(nk+1)\frac{d}{\pi^\nu}\right]+\left[\left\{(nk+1)\frac{d}{\pi^\nu}\right\}-\frac{1}{\pi^\nu}\right]$$

où $[\{(nk+1)\,d/\pi^\nu\}-1/\pi^\nu]=-1$ si et seulement si π^ν divise $nk+1$, ce qui arrive entre 1 et $\pi^\nu-1$ pour un k_0 unique, quand $(n,\pi)=1$. Notons que $k_0=\pi^\nu-1$, si $n=1$ et que $\{(nk_0+1)\,d/\pi^\nu\}=0$ est équivalent à $n\{k_0\,d/\pi^\nu\}+d/\pi^\nu$ entier positif.

On peut alors, changeant x_i/π^ν en x_i et d/π^ν en d, mettre l'inégalité à montrer sous la forme

$$\sum_{k=0}^{p}\left(\left[\sum_{i=1}^{n+1}x_i+kd\right]+[(nk+1)d]-\sum_{i=1}^{n+1}[x_i+kd]\right)\geqslant \varepsilon+\varepsilon'$$

où, pour $n=1$, $\varepsilon=1$ si $\{pd\}=1-d$, $\varepsilon=0$ sinon et $\varepsilon'=0$; pour $n\geqslant 2$, $\varepsilon=1$ si $\{pd\}=1-d$, $\varepsilon=0$ sinon, $\varepsilon'=1$ si il existe k_0 tel que $n\{k_0d\}+d$ soit entier positif, $\varepsilon'=0$ sinon; cela pour $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n+1}<1$ et $0<d<1$. Bien sûr, si $\{pd\}=1-d$, p est le plus petit entier ayant cette propriété.

$$[x_i+kd]=[kd]+[x_i+\{kd\}]$$

et

$$\left[\sum_{i=1}^{n+1}x_i+kd\right]=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]+[x_{n+1}+kd]+\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}+\{x_{n+1}+kd\}\right].$$

Posons $P=\{0,1,2,\ldots,p\}$, $\mathcal{N}(x_i)=[1-x_i,1[$,

$$\mathcal{M}=\left[1-\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}-x_{n+1},\,1-x_{n+1}\right[$$

quand $\{\sum_{i=1}^{n}x_i\}+x_{n+1}\leqslant 1$ qu'on appelle le cas 1, et

$$\mathcal{M}=[0,1-x_{n+1}[\cup\left[1-x_{n+1}+1-\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i\right\},1\right[$$

quand $\{\sum_{i=1}^{n}x_i\}+x_{n+1}>1$ qu'on appelle le cas 2. Il est clair que $[x_i+\{kd\}]=1$ si et seulement si $\{kd\}\in\mathcal{N}(x_i)$ et que $[\{\sum_{i=1}^{n}x_i\}+\{x_{n+1}+kd\}]=1$ si et seulement si $\{kd\}\in\mathcal{M}$ ces deux quantités étant nulles dans les autres cas.

Posant

$$N(x_i)=\mathrm{Card}\{k\in P \mid \{kd\}\in \mathcal{N}(x_i)\}$$

et

$$M=\mathrm{Card}\{k\in P \mid \{kd\}\in \mathcal{M}\},$$

l'inégalité s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{n} N(x_i)-M-(p+1)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\leqslant \sum_{k=0}^{p}([(nk+1)d]-n[kd])-\varepsilon-\varepsilon'.$$

Faisons une courte parenthèse pour énoncer deux lemmes.

Lemme 1. *Soient n et k des entiers naturels et d réel tel que $0\leqslant d<1$. Alors*

(1) $[(nk+1)d]-n[kd]=[n\{kd\}+d]$,

(2) $[n\{kd\}+d]=j$ *pour* $(j-d)/n\leqslant\{kd\}<(j+1-d)/n$ $(j=0,1,2,\ldots n)$.

Preuve. (1) $[n\{kd\}+d]=[n(kd-[kd])+d]=[(nk+1)d]-n[kd]$ puisque $n[kd]$ est entier.

(2) est immédiat.

On posera $F_n(\{kd\})=[(nk+1)d]-n[kd]$.

Lemme 2. *Soit une suite $(kd)_{k\in N}$ avec $0<d<1$ et un intervalle J de longueur I. On pose $N(J)=\mathrm{Card}\{k\in N \mid kd\in J\}$. Alors*

(1) $N(J)=[I/d]$ *ou* $[I/d]+1$

Supposant de plus J semi-ouvert,

(2) *Si* $\{I/d\}=0$, *alors* $N(J)=[I/d]$; *si* $\{I/d\}>0$ *et si un point de la suite est à l'extrémité fermée (resp. ouverte) de l'intervalle J, alors $N(J)=[I/d]+1$ (resp. $N(J)=[I/d]$).*

(3) $|N(J)-(I/d)|<1$

Preuve. (1) et (2) sont immédiats et (3) s'en déduit.

Revenant à l'inégalité, on voit que $N(x_i)$ et M représentent la somme des contributions des intervalles $[s,s+1]$ où $s=0,1,\ldots,[pd]$. Posons précisément pour $i=1,2,\ldots n$,

$$N_s(x_i)=\mathrm{Card}\{k\in P \mid kd-s\in \mathcal{N}(x_i)\},$$
$$M_s=\mathrm{Card}\{k\in P \mid kd-s\in \mathcal{M}\},$$
$$M'_s=\mathrm{Card}\{k\in P \mid [kd]=s \text{ et } kd-s\notin \mathcal{M}\}$$

qu'on utilisera dans le cas 2, et enfin

$$G_n(s)=\sum_{[kd]=s} F_n(\{kd\}).$$

On a évidemment

$$N(x_i)=\sum_{s=0}^{[pd]} N_s(x_i), \qquad M=\sum_{s=0}^{[pd]} M_s$$

et l'inégalité à montrer devient dans les deux cas,

$$\sum_{s=0}^{[pd]}\left(\sum_{i=1}^{n} N_s(x_i)-M_s\right)-(p+1)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\leq\sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s)-\varepsilon-\varepsilon'$$

avec son autre forme dans le cas 2 seulement,

$$\sum_{s=0}^{[pd]}\left(\sum_{i=1}^{n} N_s(x_i)+M'_s\right)-(p+1)\left(\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]+1\right)\leq\sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s)-\varepsilon-\varepsilon'.$$

On dira que le dernier intervalle $[[pd], [pd]+1[$ est incomplet si $\{pd\}+d-1<0$ et complet sinon, cas dans lequel il est analogue aux autres. On commence par $n=1$ qu'il faut traiter à part. Ici, pour chaque s, $G_1(s)=1$ car l'intervalle $[s+1-d, s+1[$ contient exactement 1 point de la suite (kd), qui est d'ailleurs le dernier point de $[s, s+1[$, sauf le dernier intervalle s'il est incomplet où alors $G_1([pd])=0$, ceci en vertu des deux lemmes. Dans le cas 1, c'est-à-dire quand $x_1+x_2\leq 1$, d'après le Lemme 2, $N_s(x_1)\leq[x_1/d]+1$, $M_s\geq[x_1/d]$ et donc $N_s(x_1)-M_s\leq 1$. Si $\{pd\}=1-d$, $N_{[pd]}(x_1)=[x_1/d]$ puisque, Lemme 2, $\{pd\}+d$ est à l'extrémité ouverte de l'intervalle $[1-x_1, 1[$, d'où $N_{[pd]}(x_1)-M_{[pd]}\leq 0$. Si le dernier intervalle est incomplet, c'est-á-dire qu'il lui manque au moins le dernier point, et qu'ainsi $N_{[pd]}(x_1)\leq[x_1/d]$, quand $\{pd\}\geq 1-x_1$, $M_{[pd]}\geq[x_1/d]$ puisque $x_1\leq x_2$, et quand $\{pd\}<1-x_1$, $N_{[pd]}(x_1)=0$. On a ainsi l'inégalité cherchée pour chaque s. Dans le cas 2, c'est-à-dire quand $x_1+x_2>1$, d'après le Lemme 2,

$$\begin{aligned}N_s(x_1)-M_s&=\mathrm{Card}\{k\in P/kd\in[s+1-x_1, s+1-x_1+1-x_2[\}\\&\quad-\mathrm{Card}\{k\in P/kd\in[s, s+1-x_2[\}\leq 1\end{aligned}$$

puisque les deux intervalles ont pour longueur $1-x_2$. Si le dernier intervalle est incomplet. il est possible que$N_{[pd]}(x_1)-M_{[pd]}=1$. Voyons le premier intervalle: Si $\{(1-x_2)/d\}=0$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\{k\in P\mid kd\in[1-x_1, 1-x_1+1-x_2[\}&=\mathrm{Card}\{k\in P\mid kd\in[0, 1-x_2[\}\\&=[(1-x_2)/d],\end{aligned}$$

et si $\{(1-x_2)/d\}>0$, alors

$$\mathrm{Card}\{k\in P\mid kd\in[1-x_1, 1-x_1+1-x_2[\}\leq\left[\frac{1-x_2}{d}\right]+1$$

mais

$$\mathrm{Card}\{k\in P\mid kd\in[0, 1-x_2[\}=[(1-x_2)/d]+1$$

puisque 0, premier point de la suite, est à l'extrémité fermée de l'intervalle. Donc $N_0(x_1)-M_0\leq 0$, et le premier intervalle compense éventuellement l'excédent du dernier. Enfin, on voit que $N_0(x_1)-M_0\leq 0$ reste vrai si le premier intervalle est aussi le dernier et qu'il est incomplet. Si $\{pd\}=1-d$, on utilise le premier intervalle. Le cas $n=1$ est réglé.

(A) On suppose désormais $n\geq 2$. Soient a_s la partie fractionnaire du plus grand des termes de la suite $(kd)_{k\in P}$ appartenant à $[s, s+1[$ et q_s le nombre des intervalles $\mathcal{N}(x_i)$ contenant a_s. Pour ceux-là il est clair que $N_s(x_i)\leq [(a_s-1+x_i)/d]+1$ d'après le Lemme 2.

Notant D le membre gauche de l'inégalité et convenant désormais d'écrire $\sum$ pour $\sum_{i=1}^{n}$ on a, dans le cas 1,

$$D\leq\sum_{s=0}^{[pd]}\left(\sum_{i=0}^{q_s}\left(\left[\frac{a_s-1+x_i}{d}\right]+1\right)-M_s\right)-(p+1)\left[\sum x_i\right],$$

d'oú

$$D\leq\sum_{s=0}^{[pd]}\left(q_s\frac{a_s+d-1}{d}-\sum_{i=1}^{q_s}\left\{\frac{a_s-1+x_i}{d}\right\}+\sum_{i=1}^{q_s}\frac{x_i}{d}-M_s\right)-(p+1)\left[\sum x_i\right]$$

puis en supprimant $\sum_{i=1}^{q_s}\{(a_s-1+x_i)/d\}$ et transformant $\sum_{i=1}^{q_s}x_i/d$,

$$D\leq\sum_{s=0}^{[pd]}\left(q_s\frac{a_s+d-1}{d}+\frac{[\sum x_i]}{d}+\frac{\{\sum x_i\}}{d}-\sum_{i=q_s+1}^{n}\frac{x_i}{d}-M_s\right)-(p+1)\left[\sum x_i\right]$$

et enfin,

$$D\leq\sum_{s=0}^{[pd]}A_s+\frac{1-\{pd\}-d}{d}\left[\sum x_i\right]$$

en posant

$$A_s=q_s\frac{a_s+d-1}{d}+\frac{\{\sum x_i\}}{d}-M_s-\sum_{i=q_s+1}^{n}\frac{x_i}{d}.$$

Dans le cas 2, de façon analogue, on obtient,

$$D\leq\sum_{s=0}^{[pd]}A_s+\frac{1-\{pd\}-d}{d}\left(\left[\sum x_i\right]+1\right)$$

en posant cette fois,

$$A_s=q_s\frac{a_s+d-1}{d}+M_s'-\frac{1-\{\sum x_i\}}{d}-\sum_{i=q_s+1}^{n}\frac{x_i}{d}.$$

Pour $s=0,1,\ldots,[pd]-1$,

$$A_s<q_s\frac{a_s+d-1}{d}+1\leq n\frac{a_s+d-1}{d}+1$$

car, Lemme 2, $\{\sum x_i\}/d-M_s<1$ et $M_s'-(1-\{\sum x_i\})/d<1$.

$(a_s+d-1)/d<1$ permet d'écrire

$$\left[n\frac{a_s+d-1}{d}\right]\leq n-1,$$

donc aussi

$$\left[n\frac{a_s+d-1}{d}\right](1-d)\leq(n-1)(1-d),$$

c'est-à-dire

$$\left[n\frac{a_s+d-1}{d}\right]+1\leq\left[n\frac{a_s+d-1}{d}\right]d+n(1-d)+d$$

$$=na_s+d-\left\{n\frac{a_s+d-1}{d}\right\}d,$$

d'où

$$\left[n\frac{a_s+d-1}{d}\right]+1\leq[na_s+d]=F_n(a_s)$$

car $[n(a_s+d-1)/d]+1$ est entier, et donc $A_s<[n(a_s+d-1)/d]+2\leq F_n(a_s)+1$; mais si $n(a_s+d-1)/d$ est entier, $A_s<F_n(a_s)$. Si maintenant, na_s+d est entier, $\varepsilon'=1$, et supposant $n(a_s+d-1)/d$ non entier, soit $\{n(a_s+d-1)/d\}$ $d>0$, $[n(a_s+d-1)/d]+1<na_s+d$, donc $[n(a_s+d-1)/d]+2\leq na_s+d$ et $A_s+\varepsilon'<F_n(a_s)+1$.

Si le dernier intervalle est complet, ce qui précède est valable pour lui. Sinon, $\{pd\}+d-1<0$ et posant $q_{[pd]}=q$ pour simplifier l'écriture, on a dans le cas 1,

$$B=A_{[pd]}+\frac{1-\{pd\}-d}{d}\left[\sum x_i\right]$$

$$=q\frac{\{pd\}+d-1}{d}-\sum_{i=q+1}^{n}\frac{x_i}{d}+\frac{\{\sum x_i\}}{d}-M_{[pd]}$$

$$+\frac{1-\{pd\}-d}{d}\left(\sum_{i=1}^{q}x_i+\sum_{i=q+1}^{n}x_i-\left\{\sum x_i\right\}\right)$$

$$=\left(q-\sum_{i=1}^{q}x_i+\left\{\sum x_i\right\}\right)\frac{\{pd\}+d-1}{d}-\frac{\{pd\}+d}{d}\sum_{i=q+1}^{n}x_i+\frac{\{\sum x_i\}}{d}-M_{[pd]}$$

Si $q\geq1$ alors $\{pd\}\geq1-x_n\geq1-x_{n+1}$, le Lemme 2 est applicable à $\{\sum x_i\}/d-M_{[pd]}$ et on obtient $B<1$. Si $q=0$,

$$B=-M_{[pd]}-\frac{\{pd\}+d}{d}\left[\sum x_i\right]<1.$$

Dans le cas 2,

$$B=A_{[pd]}+\frac{1-\{pd\}-d}{d}\left(\left[\sum x_i\right]+1\right)$$

$$=\frac{\{pd\}+d-1}{d}\left(q-\sum_{i=1}^{q}x_i+\left\{\sum x_i\right\}-1\right)$$

$$-\frac{\{pd\}+d}{d}\sum_{i=q+1}^{n}x_i+M'_{[pd]}-\frac{1-\{\sum x_i\}}{d}.$$

Si $\{\sum x_i\} = \{\sum_{i=1}^{q} x_i\} + \{\sum_{i=q+1}^{n} x_i\}$, on a

$$B = \frac{\{pd\}+d-1}{d}\left(q-1-\left[\sum_{i=1}^{q} x_i\right]+\left\{\sum_{i=q+1}^{n} x_i\right\}\right)$$
$$-\frac{\{pd\}+d}{d}\sum_{i=q+1}^{n} x_i + M'_{[pd]} - \frac{1-\{\sum x_i\}}{d}$$

Si $\{\sum x_i\} = \{\sum_{i=1}^{q} x_i\} + \{\sum_{i=q+1}^{n} x_i\} - 1$, on a

$$B = \frac{\{pd\}+d-1}{d}\left(q-1-\left[\sum_{i=1}^{q} x_i\right]\right) - \frac{\{pd\}+d}{d}\left[\sum_{i=q+1}^{n} x_i\right]$$
$$+M'_{[pd]} - \frac{\{pd\}+d}{d} - \frac{1-\left\{\sum_{i=1}^{q} x_i\right\}}{d}.$$

Comme il est bien clair que

$$\frac{\{pd\}+d}{d} \geqslant \operatorname{Card}\{k \in P \mid [kd] = [pd]\} \geqslant M'_{[pd]},$$

on obtient toujours $B < 1$.

Si un intervalle contient au moins 3 points, alors $G_n(s) \geqslant F(a_s)+1$, et $G_n(s_0) \geqslant F_n(a_{s_0})+2$ quand il contient $k_0 d$ tel que $\{k_0 d\} < a_{s_0}$ et que $n\{k_0 d\}+d$ soit entier. En effet, appelant a la partie fractionnaire du premier point, la situation $0 \leqslant a < a+d \leqslant (1-d)/n < a+2d < 1 \leqslant a+3d$ est exclue en général, car elle conduit d'une part à $d \leqslant (1-d)/n$ c'est à dire à $d \geqslant 1/(n+1)$, d'autre part à $1 \leqslant (1-d)/n + 2d$ c'est à dire à $d \geqslant (n-1)/(2n-1)$, qui ne sont compatibles que dans le cas très particulier où $n=2$ et $d=\frac{1}{3}$ pour lequel on vérifie directement et immédiatement que l'inégalité est vraie. Quand le dernier intervalle est complet, $1-\{pd\}-d \leqslant 0$, $A_s < G_n(s)$ pour chaque s et si $\varepsilon' = 1$, $A_{s_0}+1 < G_n(s_0)$; donc

$$D \leqslant \sum_{s=0}^{[pd]} A_s < \sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s) - \varepsilon',$$

d'où

$$D \leqslant \sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s) - \varepsilon' - 1 \leqslant \sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s) - \varepsilon' - \varepsilon,$$

puisque tous les deux sont des entiers. Sinon, on a

$$D \leqslant \sum_{s=0}^{[pd]-1} A_s + B < \sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s) + 1 - \varepsilon',$$

d'où, pour la même raison, $D \leqslant \sum_{s=0}^{[pd]} G_n(s) - \varepsilon'$. Cela achève la preuve pour $d \leqslant \frac{1}{3}$, en remarquant que $G_n([pd]) \geqslant 1$, quand le dernier intervalle incomplet contient $k_0 d$ tel que $n\{k_0 d\}+d$ soit entier. Dans ce qui suit, on suppose $\frac{1}{3} < d < 1$, et on va montrer que l'inégalité est presque toujours vraie intervalle par intervalle. On pose $D = \sum_{s=0}^{[pd]} D_s$ avec

$$D_s = \sum_{i=1}^{n} N_s(x_i) - M_s - I_s\left[\sum x_i\right]$$

dans les cas 1 et 2, et

$$D_s = \sum_{i=1}^{n} N_s(x_i) + M_s' - I_s\left(\left[\sum x_i\right] + 1\right)$$

dans le cas 2 où $I_s = \mathrm{Card}\{k \in P \mid [kd] = s\}$.

(B) Il y a 2 termes de la suite dans l'intervalle $[s, s+1[$ qui, modulo 1, sont a et $a+d$.

On voit facilement que, pour $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$, $1-2d \leq a < d$; pour $\frac{1}{2} \leq d < 1$, $0 \leq a < 1-d$. Soient q le nombre des intervalles $\mathcal{N}(x_i)$ contenant $a+d$ et pas a, et q' le nombre de ceux contenant $a+d$ et a. Alors

$$\sum x_i \geq q((1-a-d) + q'(1-a) = q + q' - (qa + q'a + qd),$$
$$G_n(s) = [na + d] + [na + nd + d]$$

et $D_s = q + 2q' - M_s - 2[\sum x_i]$ dans les cas 1 et 2, avec $M_s' = 2 - M_s$ qu'on utilisera dans le cas 2. On va montrer que $D_s \leq G_n(s)$, sauf dans un cas particulier.

Si $[\sum x_i] \geq q + q' - [(q+q')a + qd]$,

$$\begin{aligned} D_s &\leq -q - M_s + 2[(q+q')a + qd] \\ &\leq [(q+q')a - q(1-d)] + [(q+q')a + qd] \leq G_n(s) \end{aligned}$$

dans les cas 1 et 2, puisque, bien sûr, $q + q' \leq n$.

Si $[\sum x_i] = q + q' - [(q+q')a + qd] - 1$, alors

$$\left\{\sum x_i\right\} \geq 1 - \{(q+q')a + qd\} \quad \text{et} \quad D_s = -q + 2 - M_s + 2[(q+q')a + qd].$$

Cela revient à montrer

$$2 - M_s + 2[(q+q')a + qd] \leq [na + q + d] + [na + nd + d]$$

On a toujours

$$[(q+q')a + qd] \leq \min([na + q + d], [na + nd + d])$$

et si cette inégalité est stricte, on a

$$2[(q+q')a + qd] + 2 \leq [na + q + d] + [na + nd + d]$$

qui montre $D_s \leq G_n(s)$. Sinon, on peut avoir $[(q+q')a + qd] = [na + nd + d]$, c'est-à-dire

$$\{(q+q')a + qd\} + (n-q-q')a + (n-q)d + d = \{na + nd + d\} < 1,$$

d'où l'on tire $\{(q+q')a + qd\} < 1 - d$; $q = n$ et donc $q' = 0$ pour $d \geq \frac{1}{2}$; $q = n$, $q' = 0$ ou $q = n-1$, $q' = 1$ pour $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$, car $q' = 0$ donne $a + 2d < 1$ qui est contradictoire.

Notons que cette dernière possibilité, $q=n-1$ et $q'=1$, donne

$$\{(q+q')a+qd\}=\{na+(n-1)d\}<1-2d<d.$$

On peut avoir aussi $[(q+q')a+qd]=[na+q+d]$, c'est-à-dire

$$\{(q+q')a+qd\}+(n-q-q')a+q(1-d)+d<1,$$

qui entraîne $q=0$ et $\{(q+q')a+qd\}<1-d$. Les deux inégalités sont incompatibles, puisqu'on ne peut avoir à la fois $q=0$ et $q=n$ ou $q=n-1$, ainsi

$$2[(q+q')a+qd]+1\leqslant[na+nd+d]+[na+q+d].$$

Ensuite, ayant toujours $\{(q+q')a+qd\}<1-d$ on en tire $\{\sum x_i\}>d$, ce qui assure $M_s\geqslant 1$ dans le cas 1 et $M'_s\leqslant 1$ dans le cas 2 quand $d\geqslant\frac{1}{2}$, car alors $\{\sum x_i\}>d\geqslant 1-d$; cela est vrai aussi pour $\frac{1}{3}<d<\frac{1}{2}$, quand $q=n-1$ et $q'=1$, puisque $\{(q+q')a+qd\}<d$ implique $\{\sum x_i\}>1-d$ et donc $M'_s\leqslant 1$.

Dans ces conditions, $D_s\leqslant G_n(s)$. D'autre part, si

$$[na+nd+d]\leqslant[na+q+d]-2,\quad\text{ou si}\quad [na+q+d]\leqslant[na+nd+d]-2,$$

on a le résultat également. Il reste donc à examiner deux possibilités, dans le cas 2 avec $\frac{1}{3}<d<\frac{1}{2}$.

La première, $[(q+q')a+qd]=[na+nd+d]=[na+q+d-1]$, entraîne $q=n$ et $q'=0$, et puisque $nd<n-1$, aussi $\{na+nd\}+(n-1)(1-d)<1$, est possible seulement pour $n=2$, donne $\{na+nd\}<d$, et donc $M'_s\leqslant 1$. Ensuite, l'autre possibilité,

$$[(q+q')a+qd]=[na+q+d]=[na+nd+d-1]$$

donne avec $q=0$, $\{q'a\}+(n-q')a+nd+d-1<1$, puisque $nd>1-d$. Si $\{q'a\}\leqslant d$, $M'_s\leqslant 1$. Sinon, $\{q'a\}>d$, et alors $nd+2d-1<1$, d'où $n<4$, soit $n=2$ ou $n=3$.

Si $n=3$, minorant a par $1-2d$, on obtient

$$(3-q')(1-2d)+5d-1<1,$$

c'est-à-dire $q'>(1-d)/(1-2d)\geqslant 2$; mais si $q'=3=n$, on a $\{q'a\}=\{3a\}<2(1-2d)$; or $3a=\{3a\}$ contredit $a\geqslant 1-d$, donc $\{3a\}=3a-1<3d-1<d$ en majorant a par d, et encore $M'_s\leqslant 1$.

Enfin, si $n=2$, pour $q'=0$ et $q'=1$ on a évidemment $\{q'a\}<d$. Ainsi, le seul cas où peut-être l'inégalité n'est pas vraie intervalle par intervalle est $n=q'=2$, dans le cas 2 avec $\frac{1}{3}<d<\frac{1}{2}$, et où il est à noter qu'au pire $D_s=G_2(s)+1$.

Il reste donc à étudier dans le cas 2, la situation où $\frac{1}{3}<d<\frac{1}{2}$, $n=2$, et où il y a un intervalle $[s,s+1[$ comportant 2 points qui, modulo 1, sont tels que $0<a<\frac{1}{2}(1-d)<a+d<\frac{1}{2}(2-d)$, avec $q=0$, $q'=2$, $[x_1+x_2]=1$, $d<1-\{x_1+x_2\}<1-d$, $M'_s=2$.

Ainsi $D_s=G_2(s)+1$. Les points de l'intervalle précédent $[s-1,s[$ sont, modulo 1, $a+1-3d$, $a+1-2d$, $a+1-d$ s'il possède 3 points, les deux derniers s'il n'en possède que 2. Comme $q'=2$, $1-x_2\leqslant 1-x_1\leqslant a$, ce qui entraîne $a\geqslant\frac{1}{2}(1-\{x_1+x_2\})>\frac{1}{2}d$, donc $a+1-d>\frac{1}{2}(2-d)$ et $a+1-2d>\frac{1}{2}(1-d)$, d'où $G_2(s-1)\geqslant 3$, et $G_2(s-1)\geqslant 4$ si $a+1-3d=\frac{1}{2}(1-d)$ ou si $a+1-2d=\frac{1}{2}(2-d)$.

D'autre part, $M_s' = 2$ signifie que a appartient au complémentaire de $\mathcal{M}$ dans $[0, 1[$ ce qui empêche $a + 1 - d$ de lui appartenir aussi, puisque $1 - d > 1 - \{x_1 + x_2\}$. Pour un intervalle $[s-1, s[$ comportant 2 points, on a donc

$$D_{s-1} \leq 2 + 2 + 1 - 2(1+1) = 1,$$

comportant 3 points

$$D_{s-1} \leq 3 + 3 + 2 - 3(1+1) = 2,$$

et ainsi, un intervalle de 2 points excédentaire est toujours compensé par celui qui le précède. Pour un intervalle quelconque contenant 3 points, on a $D_s \leq 3 + 3 + 2 - 3(1+1) = 2$, car $M_s' \leq 2$ puisque $1 - \{x_1 + x_2\} < 1 - d < 2d$, et $G_2(s) \geq 2$. Enfin, si le dernier intervalle est incomplet avec 1 point, on a $D_{[pq]} \leq 2 + 1 - 2 = 1$ et $G_2([pd]) \geq 0$, avec 2 points, on a $D_{[pd]} \leq 4 + 2 - 4 = 2$ et $G_2([pd]) \geq 1$; mais pour le premier intervalle qui comporte les 3 points $0, d, 2d$, on a $D_0 \leq 4 + 2 - 6 = 0$ et $G_2(0) \geq 2$ ce qui compense le dernier intervalle et aussi éventuellement le second, s'il est excédentaire. On vérifie que les mêmes conclusions demeurent si l'un des intervalles considérés contient $k_0 d$ tel que $2\{k_0 d\} + d$ soit entier.

Si $na + d$ ou $na + nd + d$ est entier, $\varepsilon' = 1$, mais nous allons voir que, presque toujours, $D_s + 1 \leq G_n(s)$. Si $[\sum x_i] \geq q + q' - [(q+q')a + qd]$, c'est évident. Sinon les situations à étudier sont, quand

$$[(q+q')a + qd] < \min([na + q + d], [na + nd + d]),$$

$$(\alpha) \qquad [(q+q')a + qd] + 1 = [na + q + d] = na + nd + d$$

$$(\beta) \qquad [(q+q')a + qd] + 1 = [na + nd + d] = na + q + d$$

quand $[(q+q')a + qd] = \min([na + q + d], [na + nd + d])$,

$$(\gamma) \qquad [(q+q')a + qd] = [na + q + d] = na + nd + d - 2$$

$$(\delta) \qquad [(q+q')a + qd] = [na + nd + d] = na + q + d - 2$$

Par exemple, $[(q+q')a + qd] + 1 = na + nd + d$ s'écrit aussi

$$\{(q+q')a + qd\} + (n - q - q')a + (n-q)d + d = 1$$

et on constate qu'on en tire au moins les mêmes conclusions que de l'inégalité stricte donnée par $[(q+q')a + qd] = [na + nd + d]$. La même remarque vaut pour l'égalité analogue. Ainsi, (α) et (δ) (resp. (β) et (γ)) conduisent-elles aux mêmes conclusions que $[(q+q')a + qd] = [na + nd + d] = [na + q + d - 1]$ (resp. $[(q+q')a + ad] = [na + q + d] = [na + nd + d - 1]$). Les situations $[(q+q')a + qd] = [na + q + d] = na + nd + d - 1$ et l'analogue ne sont pas possibles car elles entraînent les mêmes conclusions que $[(q+q')a + qd] = [na + q + d] = [na + nd + d]$. On obtient donc, comme plus haut, $M_s \geq 1$ dans le cas 1, et $M_s' \leq 1$ dans le cas 2, ce qui nous suffit, sauf quand $n = q' = 2$, $\frac{1}{3} < d < \frac{1}{2}$, où l'on voit que γ est impossible et que β conduit à $a = \frac{1}{2}(1-d) < a + d < \frac{1}{2}(2-d)$, c'est à dire éventuellement à $D_s = G_2(s)$, mais où le même calcul qu'auparavant donne $D_{s-1} + 1 \leq G_2(s-1)$.

Pour $\frac{1}{3}<d\leqslant\frac{1}{2}$, les intervalles $[s, s+1[$ contiennent 2 ou 3 points de la suite, et pour ceux de 2 points, on vient de montrer que, sauf un cas, l'inégalité est vraie. Supposons qu'il y ait r intervalles de cette sorte.

Plus haut, dans (A), la majoration utilisée du membre gauche de l'inégalité était

$$\sum_{s=0}^{[pd]} A_s + \frac{1-\{pd\}-d}{d}\left[\sum x_i\right]$$

dans le cas 1 et

$$\sum_{s=0}^{[pd]} A_s + \frac{1-\{pd\}-d}{d}\left(\left[\sum x_i\right]+1\right)$$

dans le cas 2. Le coefficient $t_0=1-\{pd\}-d$ devient quand on enlève ces r intervalles, $t_r=1-\{pd\}-d+r(2d-1)$.

Pour $\frac{1}{3}<d\leqslant\frac{1}{2}$, $2d-1\leqslant 0$, donc $t_r\leqslant t_0$, et la même fin de preuve qu'en A peut être, à plus forte raison, utilisée.

(C) On suppose $d>\frac{1}{2}$, que l'intervalle $[s, s+1[$ contient 1 terme de la suite dont la partie fractionnaire est a, et qui est donc tel que $1-d\leqslant a<d$.

Ici $G_n(s)=[na+d]$ et $D_s=q-M_s-[\sum x_i]$ avec $\sum x_i\geqslant q-qa$, en appelant q le nombre des intervalles $\mathcal{N}(x_i)$ qui contiennent a.

Si $[\sum x_i]\geqslant q-[qa]$, alors

$$D_s\leqslant -M_s+[qa]\leqslant[na+d]=G_n(s)$$

dans les cas 1 et 2.

Si $[\sum x_i]=q-[qa]-1$, alors $\{\sum x_i\}\geqslant 1-\{qa\}$ et $D_s=-M_s+[qa]+1$ avec $M_s'=1-M_s$ dans le cas 2.

Si $[qa]\leqslant[na+d]-1$, $D_s\leqslant G_n(a)$ dans les deux cas. Sinon, $[qa]=[na+d]$, d'où $\{qa\}+(n-q)a+d<1$, donc $q=n$ puisque $a\geqslant 1-d$, et aussi $1-\{qa\}>d$, d'où l'on déduit $\{\sum x_i\}>d$ qui signifie $M_s=1$ dans le cas 1, c'est-à-dire $D_s=G_n(s)$. En revanche dans le cas 2, si $M_s'=1$, il est possible que $D_s=G_n(s)+1$, mais on va montrer que l'intervalle précédent compense cet excédent. En effet, quand l'intervalle $[s-1, s[$ contient 1 point de la suite, qui est $a+1-d$ modulo 1, $D_{s-1}=[na]$ car $M_{s-1}'=0$ en raison de $M_s'=1$ et de $1-\{\sum x_i\}<1-d$, puis

$$[na]+1\leqslant[na+n(1-d)+d]=G_n(s-1),$$

et si $na+n(1-d)+d$ est entier

$$[na]+2\leqslant na+n(1-d)+d=G_n(s-1),$$

car on aurait sinon, $\{na\}+n(1-d)+d\leqslant 1$ qui est impossible.

Quand $[s-1, s[$ contient 2 points, qui sont $a+1-2d$ et $a+1-d$ modulo 1, appelons q' le nombre des intervalles $\mathcal{N}(x_i)$ contenant $a+1-2d$; il y a donc $n-q'$ qui contiennent $a+1-d$ et pas $a+1-2d$, puisqu'il y en a n qui contiennent a, et alors

$$\sum x_i\geqslant q'(2d-a)+(n-q')(1-a),$$

d'où $\{\sum x_i\}\geqslant 1-\{na\}+q'(2d-1)$, car $[\sum x_i]=n-[na]-1$.

Ici, comme $M'_{s-1}=2-M_{s-1}$, $D_{s-1}=-n+q'+2[na]+M'_{s-1}$,

$$G_n(s-1)=[na+n(1-d)+d]+[na+n(1-2d)+d]$$

et on veut montrer $G_n(s-1)\geqslant D_{s-1}+1$. Or

$$G_n(s-1)-D_{s-1}-1=[\{na\}+d+n(1-d)] \\ +[\{na\}+d+2n(1-d)]-q'-M'_{s-1}-1$$

et en utilisant $\{na\}>q'(2d-1)$, qu'on déduit de la minoration de $\{\sum x_i\}$, on obtient

$$G_n(s-1)-D_{s-1}\geqslant[(n-q')(1-d)+q'd+d] \\ +[2(n-q')(1-d)+d]-M'_{s-1}-1.$$

Si $q'=0$,

$$[n(1-d)+d]+[2n(1-d)+d]\geqslant 2\geqslant M'_{s-1}+1,$$

car $1-\{\sum x_i\}<1-d<d$. Si $1\leqslant q'\leqslant n-1$, on minore donc q' et $n-q'$ par 1, et on obtient $[1+d]+[2-d]\geqslant 2$. Enfin, si $q'=n$, il vient $[nd+d]+[d]\geqslant 2$ pour $n\geqslant 3$, et si $n=2$, on a à la fois, $2(2d-1)<\{2a\}<1-d$ et $2(1-d)\leqslant 2a<2d$ qui est contradictoire, que $\{2a\}=2a$ ou que $\{2a\}=2a-1$.

Quand $na+n(1-d)+d$ ou $na+n(1-2d)+d$ est entier,

$$G_n(s-1)-D_{s-1}=[2\{na\}+3n(1-d)+2d]-q'-M'_{s-1}\geqslant 2$$

si $q'=0$, car $\{na\}+n(1-d)+d\geqslant 2$ ou $\{na\}+2n(1-d)+d\geqslant 2$.

Si $1\leqslant q'\leqslant n-1$, comme plus haut,

$$G_n(s-1)-D_{s-1}\geqslant[3(n-q')(1-d)+q'd+2d]-M'_{s-1} \\ \geqslant[3(1-d)+d+2d]-M'_{s-1}\geqslant 2.$$

Si $q'=n$, $G_n(s-1)-D_{s-1}\geqslant[nd+2d]-M'_{s-1}\geqslant$ 2 pour $n\geqslant 4$; on a vu que $n=2$ est impossible, quant à $n=3$ où $3(1-2d)<\{3a\}<1-d$ donne $4d<\{3a\}+3(1-d)+d<4-3d$ et $3+d<\{3a\}+6(1-d)+d<7-6d$, il est également impossible car aucune valeur entière ne convient à ces inégalités.

Quand $na+d$ est entier, si $[\sum x_i]\geqslant q-[qa]$,

$$D_s\leqslant -M_s+[qa]\leqslant na+d-1=G_n(s)-1;$$

si $[\sum x_i]=q-[qa]-1$, $\{\sum x_i\}\geqslant 1-\{qa\}$, $\{qa\}>0$,

$$D_s=-M_s+[qa]+1\leqslant G_n(s)-1 \quad \text{si } [qa]\leqslant na+d-2,$$

sinon, $[qa]=na+d-1$, c'est à dire $\{qa\}+(n-q)a+d=1$, d'où l'on tire $q=n$ et $\{qa\}=1-d$ qui conduisent de la même façon aux mêmes conclusions que plus haut. Dans le cas 1, $D_s+1\leqslant G_n(s)$ et si, dans le cas 2, $D_s=G_n(s)$, le même calcul montre que $D_{s-1}+1\leqslant G_n(s-1)$.

Quand $\{pd\}=1-d$, $\varepsilon=1$, et nous allons voir que c'est le premier intervalle qui, presque toujours, le compense.

$$\sum x_i \geqslant q_0-q_0d, \quad D_0=q_0-M_0-2\left[\sum x_i\right], \quad G_n(0)=[nd+d]\geqslant 1,$$

q_0 étant le nombre des $\mathcal{N}(x_i)$ contenant d.

Si $[\sum x_i]\geqslant q_0-q_0d$, alors $D\leqslant -q_0+2[q_0d]-M_0$; pour $q_0=0$, $D_0\leqslant -M_0\leqslant G_n(0)-2$ sauf si $M_0=0$ où alors $D_0\leqslant G_n(0)-1$; pour $q_0\geqslant 1$, on a $q_0-[q_0d]\geqslant 1$ et donc $D_0\leqslant -1+[q_0d]-M_0\leqslant G_n(0)-2$, sauf si $M_0=0$ où $D_0\leqslant G_n(0)-1$. Cela nous suffit car $M_0=0$ signifie qu'on est dans le cas 1 et que le second intervalle ne peut être excédentaire. Quand $nd+d$ est entier, on obtient dans les mêmes situations, $D_0\leqslant G_n(0)-3$ ou $D_0\leqslant G_n(0)-2$ car $nd+d\geqslant 2$ et $[q_0d]\leqslant[nd]=nd+d-1$. Si $[\sum x_i]=q_0-[q_0d]-1$, $q_0\geqslant 1$ et $\{\sum x_i\}\geqslant 1-\{q_0d\}$, $D_0=-q_0+2[q_0d]+2-M_0$. Si $[\sum x_i]\geqslant 1$, alors $D_0\leqslant[q_0d]-M_0$. Or $[q_0d]=[nd+d]$ donne $\{q_0d\}+(n-q_0)d+d<1$, soit $q_0=n$ et $\{q_0d\}=\{nd\}<1-d$, donc $\{\sum x_i\}>d$ et ainsi, $M_0=0$ et $[q_0d]=[nd+d]$ sont contradictoires. On peut avoir $M_0=0$ et $[q_0d]=[nd+d]-1$ qui donne $D_0\leqslant G_n(0)-1$; on peut avoir aussi $M_0=1$ et $[q_0d]=[nd+d]$ et on obtient encore $D_0\leqslant G_n(0)-1$ qui suffit dans le cas 1. Sinon, on est dans le cas 2 avec $1-x_{n+1}\leqslant d<1-x_{n+1}+1-\{\sum x_i\}$ et comme $1-\{\sum x_i\}<1-d$, $1-x_{n+1}>2d-1$, d'où $M_1=1$: ici non plus le second intervalle ne peut être excédentaire. Quand $nd+d$ est entier, on obtient $D_0\leqslant G_n(0)-2$, car $[q_0d]=nd+d-1$ donne $\{q_0d\}+(n-q_0)d+d=1$ dont on tire les mêmes conclusions que plus haut de l'inégalité stricte.

Si $[\sum x_i]=0$, alors $D_0=[q_0d]+1-M_0$. q désignant le nombre de $\mathcal{N}(x_i)$ contenant $\{pd\}=1-d$, on a $\sum x_i\geqslant q-q(1-d)=qd$, ce qui donne $q=0$ ou $q=1$. $D_{[pd]}=q-M_{[pd]}$, $G_n([pd])=[n(1-d)+d]\geqslant 1$ et $\geqslant 2$ si $n(1-d)+d$ est entier, donc $D_{[pd]}\leqslant G_n([pd])-1-\varepsilon'$ pour $q=0$. On a le même résultat pour $q=1$ dans le cas 1, car alors, $\sum x_i=\{\sum x_i\}\geqslant d$ entraîne $M_{[pd]}=1$. On suppose donc que l'on est dans le cas 2 avec $q=1$. $q=1$ signifie $x_n\geqslant d$, $q_0\geqslant 2$ entraîne $x_{n-1}\geqslant 1-d$, d'où $\sum x_i\geqslant x_n+x_{n-1}\geqslant 1$ qui est contradictoire, donc $q_0=1$ et $D_0=1-M_0\leqslant 0$. $D_0=G_n(0)$, ou $D_0=G_n(0)-1$ si $nd+d$ est entier, sont impossibles, car conduisant à $nd+d\leqslant 1$. $D_0=G_n(0)-1$, ou $D_0=G_n(0)-2$ si $nd+d$ est entier, et le second intervalle excédentaire conduisent à $nd+d\leqslant 2$ avec $d\geqslant\frac{2}{3}$, donc à $n=2$, $d=\frac{2}{3}$, et à $\sum x_i\geqslant\frac{4}{3}$ qui est contradictoire.

Quand $d>\frac{1}{2}$, il reste à traiter le cas où le dernier intervalle est incomplet et où donc $0\leqslant\{pd\}<1-d$, $G_n([pd])=[n\{pd\}+d]$, $D_{[pd]}=q-M_{[pd]}-[\sum x_i]$, q étant le nombre des $\mathcal{N}(x_i)$ qui contiennent $\{pd\}$, ce qui permet d'écrire $\sum x_i\geqslant q-q\{pd\}$.

Si $[\sum x_i]\geqslant q-[q\{pd\}]$,

$$D_{[pd]}\leqslant -M_{[pd]}+[p\{pd\}]\leqslant[n\{pd\}+d]=G_n([pd])$$

dans les cas 1 et 2.

Si $[\sum x_i]=q-[q\{pd\}]-1$, ce qui exige $\{\sum x_i\}\geqslant 1-\{q\{pd\}\}$ et $q>0$.

$$D_{[pd]}=-M_{[pd]}+[q\{pd\}]+1.$$

$D_{[pd]}\leqslant G_n([pd])$ sauf si $M_{[pd]}=0$ et $[q\{pd\}]=[n\{pd\}+d]$, auquel cas $D_{[pd]}=$

$G_n([pd])+1$, ce qui entraîne

$$\{q\{pd\}\}+(n-q)\{pd\}+d<1$$

et donc $\{\sum x_i\}>d$. Comme $q>0$, $1-x_{n+1}\leqslant\{pd\}$; on ne peut être dans le cas 1, car on aurait $\{\sum x_i\}<\{pd\}$ et donc $\{\sum x_i\}<1-d$ qui contredit $\{\sum x_i\}>d$. On se trouve donc dans le cas 2 avec

$$1-x_{n+1}\leqslant\{pd\}<1-x_{n+1}+1-\{\sum x_i\},$$

et on va montrer que c'est alors le premier intervalle qui compense l'excédent du dernier. En effet, celui-là comportant les 2 points 0 et d, $G_n(0)=[nd+d]$, $D_0=q_0-M_0-2[\sum x_i]$, $\sum x_i\geqslant q_0-q_0d$, $M_0\geqslant 1$, q_0 désignant le nombre des $\mathcal{N}(x_i)$ contenant d.

Si $[\sum x_i]\geqslant q_0-[q_0d]$,

$$D_0\leqslant -q_0-M_0+2[q_0d]\leqslant[nd+d]-1=G_n(0)-1.$$

Si $[\sum x_i]=q_0-[q_0d]-1$,

$$D_0=-q_0+2[q_0d]+2-M_0.$$

$D_0\leqslant G_n(0)-1$ sauf si, à la fois, $q_0-[q_0d]-1=0$ et $M_0=1$; mais alors, d'une part on a aussi $q-[q\{pd\}]-1=0$, donc $0\leqslant q\{pd\}-q+1$ et comme $\{pd\}<1-d$, on obtient $qd<1$ c'est-à-dire $q=1$; on en déduit $1-\{\sum x_i\}\leqslant\{pd\}$ et $\{pd\}+(n-1)\{pd\}+d<1$, soit $n\{pd\}<1-d$. D'autre part, $M_0=1$ entraîne $d<1-x_{n+1}+1-\{\sum x_i\}$, comme $1-x_{n+1}\leqslant\{pd\}$, on obtient $d<2\{pd\}$ qui est contradictoire avec $n\{pd\}<1-d$ pour $n\geqslant 2$.

En dernier lieu, il reste à s'assurer que le premier intervalle remplit effectivement un double rôle, au cas où le second intervalle contient 1 point et est aussi excédentaire. Ce point est $2d-1$ modulo 1, $M_1=0$, et on a donc

$$1-x_{n+1}\leqslant\{pd\}<1-d\leqslant 2d-1<1-x_{n+1}+1-\{\sum x_i\}.$$

On va montrer qu'alors $D_0\leqslant G_n(0)-2$. En effet, $q_0-[q_0d]-1=0$ conduit, comme on l'a vu plus haut, à $1-\{\sum x_i\}\leqslant\{pd\}$ et $n\{pd\}<1-d$, d'où

$$1-x_{n+1}+1-\left\{\sum x_i\right\}<\frac{2(1-d)}{n}\leqslant 1-d,$$

ce qui est contradictoire; $M_0=1$ implique, quant à lui, $d<2\{pd\}<2(1-d)$ qui est contradictoire avec $1-d\leqslant 2d-1$. On vérifie sans peine qu'on obtient les mêmes conclusions quand, soit $nd+d$, soit $n\{pd\}+d$ est entier. Cette partie C, jointe au fait, montré dans B, que l'inégalité est vraie pour un intervalle de 2 points quand $d>\frac{1}{2}$, achève la preuve de l'inégalité globale et donc celle du résultat.

Bibliographie

[1] L. Dickson, Theory of Numbers, Vol. 1 (Chelsea Publ. Com., New York).

[2] E. Landau, Nouvelles Annales de Mathématiques 3 (19) (1900) 344–362.

[3] L. Carlitz, Acta Arithmetica 13 (1967) 29–47.